

182-30286

Communication présentée au Cinquième Colloque International  
sur les Méthodes de Calcul Scientifique et Technique,  
INRIA, 14-18 décembre 1981, Versailles, France.

TM-76692

UNE APPROCHE PAR DOMAINES POUR LE CALCUL  
D'ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES

L. Cambier, W. Ghazzi, J.P. Veillot et H. Viviani  
Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA)  
92320 Châtillon - FRANCE

On présente une approche par domaines pour le calcul d'écoulements compressibles par des méthodes instationnaires ou pseudo-instationnaires. Cette approche est fondée sur une technique générale de raccord de deux domaines, dans lesquels on résout des systèmes hyperboliques qui peuvent être différents, à l'aide de relations de compatibilité associées à ces systèmes. On montre des exemples d'application de cette approche au calcul d'écoulements transsoniques de fluide parfait, et en particulier à l'ajustement des chocs. On applique ensuite cette approche au traitement d'un problème d'interaction choc-couche limite dans un canal transsonique.

1 - INTRODUCTION -

La mécanique des fluides numérique s'intéresse à des problèmes de plus en plus complexes, en particulier dans le domaine aéronautique, que ce soit du point de vue des configurations géométriques traitées ou du point de vue de la modélisation mathématique des phénomènes physiques. Une idée générale, vers laquelle semblent converger actuellement de nombreux efforts pour le traitement de problèmes complexes, et à laquelle d'ailleurs se rattachent des travaux anciens, est celle du calcul par domaines. Dans cette approche, le problème du calcul de l'écoulement dans un domaine  $\mathcal{D}$  important est décomposé en plusieurs sous-problèmes couplés de calcul d'écoulements dans des sous-domaines  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots$  dont la réunion est égale à  $\mathcal{D}$ . Au niveau de chaque sous-problème, on peut escompter des avantages importants de deux ordres : ceux liés à la géométrie et ceux liés au modèle mathématique ou numérique.

Il sera en effet plus facile de construire, pour chaque sous-domaine, un maillage bien adapté au sous-problème correspondant si les sous-domaines sont effectivement déconnectés en ce qui concerne leur maillage. Une meilleure adaptation se traduira, à précision donnée, par une réduction du nombre de points de calcul.

D'autre part, l'approche par domaines donne la possibilité d'utiliser des modèles mathématiques différents et des méthodes numériques différentes dans les divers sous-domaines, et donc d'utiliser le modèle et la méthode les mieux adaptés à la nature de l'écoulement dans chaque sous-domaine (par exemple, effets visqueux négligeables ou non, ou justiciables de l'approximation de couche limite, écoulement irrotationnel, linéarisation à grande distance, etc.).

Ainsi l'approche par domaines permet de tirer profit au mieux des connaissances, précises ou floues, que l'on a a priori sur l'écoulement à calculer. La difficulté principale que soulève cette approche vient du couplage des sous-problèmes entre eux.

Cette approche peut être vue également sous un autre aspect plus spécifiquement informatique, lié à l'utilisation de calculateurs à structure parallèle macroscopique (multiprocesseurs), (voir par exemple [1], [2]). Dans ce cas la décomposition par domaines peut être recherchée uniquement pour une parallélisation optimale du calcul conduisant à une réduction considérable des temps de calcul.

Cependant le calcul par domaines présente des avantages pour le traitement de problèmes complexes même sur un ordinateur conventionnel (séquentiel) et seul cet aspect est abordé dans le travail présenté ici.

L'approche par domaines a été considérée déjà depuis quelques années pour la résolution de problèmes elliptiques (par ex. [3]) ; plus récemment elle a été mise en oeuvre pour des écoulements de fluide visqueux incompressible [4], [5], [6], et pour des écoulements transsoniques visqueux [7]. Les travaux de Le Balleur [8] sur les méthodes de couplage fluide parfait-fluide visqueux ressortent également de l'approche par domaines. Enfin la technique de sous-maillage et de résolution par zones [9] qui est mise en oeuvre ici (§ 4.3.7) pour réaliser un maillage suffisamment fin dans la couche visqueuse est un exemple d'application de cette approche au problème de l'optimisation du maillage.

Dans le présent article, nous présentons une technique de calcul par domaines pour la détermination d'écoulements compressibles, visqueux ou non, par des méthodes de type instationnaire explicite. Le raccord des domaines entre eux est effectué d'une façon systématique par la méthode des relations de compatibilité, ce qui suppose que les effets dissipatifs sont négligeables au voisinage de la ligne de raccord. Après l'exposé du principe général de raccord (§ 2), on montre des applications en fluide parfait en particulier pour l'ajustement des ondes de choc (§ 3).

On présente ensuite une méthode de résolution des équations de Navier-Stokes en fluide compressible et sa mise en oeuvre dans une approche par domaines pour le traitement numérique d'un problème d'interaction choc-couche limite dans un canal transsonique (§ 4).

## 2 - CALCUL PAR DOMAINES POUR DES PROBLEMES HYPERBOLIQUES -

### 2.1 - Principe général du traitement des frontières -

On considère un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, écrit sous la forme conservative suivante :

$$(2.1) \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial x_j} = 0$$

où les  $M$  composantes du vecteur  $\bar{U}$  sont les variables indépendantes décrivant complètement l'état du système physique considéré,  $t$  est le temps et  $x_j$  des coordonnées d'espace. Les vecteurs  $\bar{F}_j$ , en nombre égal à la dimension  $d$  de l'espace  $R^d$  considéré, sont des fonctions explicitement connues des composantes du vecteur  $\bar{U}$ . Divers systèmes tels que (2.1) peuvent être considérés en dynamique des gaz. Le système de base est celui des équations d'Euler qui traduisent les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, avec  $\bar{U} = (\rho, \rho \bar{V}, \rho E)^T$ , où  $\rho$  est la masse volumique,  $\bar{V}$  le vecteur vitesse et  $E$  l'énergie totale spécifique. On peut aussi envisager des systèmes simplifiés dérivés des équations d'Euler en utilisant des propriétés exactes connues de la solution cherchée, ces propriétés pouvant être exactes pour des solutions instationnaires ou seulement pour des solutions stationnaires. Dans ce dernier cas on a affaire à des méthodes de type pseudo-instationnaire dans lesquelles le temps apparaît comme une variable d'itération. Le lecteur trouvera des exemples et des applications de méthodes pseudo-instationnaires dans les références [10], [11], [12] et [15].

A la forme conservative (2.1), nous associons un système quasi-linéaire, équivalent pour des solutions continues, que nous écrivons de la manière suivante :

$$(2.2) \quad \bar{A}_0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \bar{A}_j \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} = 0$$

où  $\bar{A}_0$  et  $\bar{A}_j$  sont des matrices  $M \times M$  définies par  $\bar{A}_0 = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{f}}$ ,  $\bar{A}_j = \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial \bar{f}}$  et où la correspondance entre  $\bar{f}$  et  $\bar{U}$  est biunivoque.

La technique de raccord de domaines que nous présentons ici n'est valable que pour des systèmes hyperboliques dont nous rappelons les propriétés essentielles. Pour une étude plus complète des systèmes hyperboliques, le lecteur pourra consulter les références [13] et [14]. Le système (2.2) est hyperbolique en temps si, pour tout vecteur  $\xi$  non nul de  $\mathbb{R}^d$ , de composantes  $\xi_j$ , l'équation caractéristique en  $\lambda$  :

$$(2.3) \quad \det \{ \lambda \bar{A}_0 - \xi_j \bar{A}_j \} = 0$$

admet  $M$  racines réelles, distinctes ou non, valeurs propres de la matrice  $\bar{A}_0^{-1} (\xi_j \bar{A}_j)$ , et si les  $M$  vecteurs propres à gauche  $\bar{\alpha}$ , tels que :

$$(2.4) \quad \bar{\alpha} \cdot (\lambda \bar{A}_0 - \xi_j \bar{A}_j) = 0$$

sont linéairement indépendants, constituant ainsi une base de l'espace dans lequel on cherche la solution  $\bar{f}$ .

Dans ces conditions, il existe, pour chaque vecteur propre  $\bar{\alpha}$ , une combinaison linéaire des équations (2.2) définie par :

$$(2.5) \quad \bar{\alpha} \cdot \left( \bar{A}_0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \bar{A}_j \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} \right) = 0$$

qui ne fait intervenir que  $d$  dérivées partielles au lieu de  $d+1$  pour le système initial (2.2). Cette combinaison particulière, appelée relation de compatibilité, peut encore s'écrire sous la forme :

$$(2.6) \quad \bar{\omega} \cdot \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi} \right) + \bar{\tau}^{(d)} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \eta^{(d)}} = 0, \quad \bar{\omega} = \bar{\alpha} \cdot \bar{A}_0$$

où les opérateurs  $\partial/\partial \xi = \xi_j \partial/\partial x_j$  et  $\partial/\partial \eta^{(d)} = \eta_j^{(d)} \partial/\partial x_j$

représentent des dérivations le long des directions  $\xi$ ,  $\eta^{(d)}$  et où les  $d-1$  vecteurs  $\eta^{(d)}$  sont contenus dans un plan orthogonal au vecteur  $\xi$ . Il est alors clair que si les dérivées partielles de  $\bar{f}$  suivant les directions  $\eta^{(d)}$  sont connues à l'instant  $t_0$ , l'équation (2.6) peut être considérée comme une équation de transport le long de la droite de pente  $(1/\lambda)$  du plan  $(\xi, t)$  et permet de déterminer la solution  $\bar{f}$  à l'instant  $t_1 > t_0$ . Cette interprétation constitue le fondement de la technique générale de traitement des conditions aux limites proposée par Viviani et Veuillot dans [11], et dont la technique de raccord mise en oeuvre dans le calcul par domaines n'est qu'une extension.

On considère un point  $P$  de la frontière  $\Sigma$ , éventuellement mobile, du domaine de calcul  $\mathcal{D}$ ;  $\bar{\nu}$  est la normale unitaire en  $P$  orientée vers l'extérieur du domaine  $\mathcal{D}$ ,  $\bar{w}$  désigne la vitesse normale de déplacement du point  $P$  :  $\bar{w} = w \bar{\nu}$ . Au point  $P$ , le système peut être remplacé par un système équivalent composé des relations de compatibilité de la forme (2.6) et déterminées en prenant pour vecteur  $\xi$  la normale extérieure  $\bar{\nu}$ . Avec ce choix, les dérivées partielles le long des directions contenues dans le plan tangent en  $P$  à la frontière  $\Sigma$  sont alors connues lorsque les variables  $\bar{f}$  sont connues dans le domaine  $\mathcal{D}$ . La position de  $w$  par rapport aux  $M$  valeurs propres  $\lambda(\bar{\nu})$  ordonnées de façon croissante, par exemple :

$$(2.7) \quad \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m < w \leq \lambda_{m+1} \leq \dots \leq \lambda_M$$

montre que, parmi les  $M$  relations de compatibilité (2.6),  $m$  relations transportent une information de l'extérieur du domaine de calcul  $\mathcal{D}$  vers l'intérieur, et  $M - m$  relations correspondent à un transport dans la direction opposée. Les  $m$  premières relations de compatibilité ne peuvent donc être utilisées et doivent être remplacées par  $m$  conditions aux limites dont la nature dépend généralement de la physique du problème considéré. D'où l'énoncé du principe suivant :

- en un point d'une frontière du domaine de calcul, les variables sont déterminées à l'aide d'un système d'équations constitué des  $M - m$  relations de compatibilité associées aux valeurs propres telles que :

$$(2.8) \quad \lambda(\bar{v}) \geq W$$

et de  $m$  conditions aux limites.

On notera que, pour le cas limite  $\lambda = W$ , la relation de compatibilité correspondante constitue une équation de transport le long de la frontière  $\Sigma$  et est utilisée pour le calcul de la solution. Pour une frontière fixe ( $W = 0$ ) et dans le cas des systèmes pseudo-instationnaires que nous avons étudiés, le nombre  $m$  de conditions aux limites à imposer en un point de la frontière dépend exclusivement de la position du nombre de Mach normal  $M_p = \bar{V} \cdot \bar{v}/a$  par rapport aux valeurs :  $-1, 0, +1$ . En revanche, pour une frontière mobile ( $W \neq 0$ ) il n'est, en général, pas possible de mettre en évidence une règle analogue faisant intervenir le nombre de Mach normal relatif  $M'_p = (\bar{V} - W) \cdot \bar{v}/a$ , comme c'est le cas pour les équations d'Euler exactes.

La mise en oeuvre pratique du principe précédemment énoncé dans une méthode de résolution numérique du système (2.1) peut être réalisée très simplement sans faire intervenir directement les caractéristiques du plan  $(\xi, t)$ , mais en discrétisant directement la relation de compatibilité (2.6) écrite sous la forme :

$$(2.9) \quad \bar{\alpha} \cdot \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial x_j} \right) = 0$$

dans le maillage de base. Après discrétisation, la relation de compatibilité (2.9) peut être écrite de la manière abrégée suivante :

$$(2.10) \quad \bar{\alpha}^n \cdot \left( \frac{\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^n}{\Delta t} + \left\{ \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial x_j} \right\}^{n+\frac{1}{2}} \right) = 0$$

où  $\left\{ \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial x_j} \right\}^{n+\frac{1}{2}}$  représente une approximation numérique de  $\frac{\partial \bar{F}_j}{\partial x_j}$ . La façon la plus commode de définir cette approximation est d'écrire le système (2.1) discrétisé à la frontière en adaptant le schéma aux différences pour tenir compte de l'absence de points de maillage extérieurs. Ce système discrétisé se présente alors sous la forme :

$$(2.11) \quad \frac{\bar{U}^* - \bar{U}^n}{\Delta t} + \delta_j \bar{F}_j^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

et on prend pour approximation  $\left\{ \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial x_j} \right\}^{n+\frac{1}{2}}$ , dans (2.10), l'expression discrétisée  $\delta_j \bar{F}_j^{n+\frac{1}{2}}$ . On notera que les variables  $\bar{U}^*$  n'ont pas de sens physique puisqu'elles ne vérifient pas les conditions aux limites. Par élimination du terme  $\delta_j \bar{F}_j^{n+\frac{1}{2}}$  dans les expressions (2.10) et (2.11), on obtient la relation très simple suivante :

$$(2.12) \quad \bar{\alpha}^n \cdot (\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^*) = 0$$

ou encore, en employant les variables  $\bar{f}$ ,

$$(2.13) \quad \bar{\omega}^n \cdot (\bar{f}^{n+1} - \bar{f}^*) = 0$$

Les  $M-m$  relations de compatibilité utilisées en un point de la frontière sont donc discrétisées de cette façon en employant la valeur  $\bar{U}^*$  qui résulte de l'intégration numérique de (2.1) à la frontière. A ces relations on adjoint  $m$  conditions aux limites et l'on résout ce système pour obtenir la valeur de  $\bar{U}^{*+1}$  à la frontière.

## 2.2 - Application au raccord de deux sous-domaines -

On se propose, maintenant, d'appliquer le principe général établi au paragraphe 2.1 au cas où la frontière  $\Sigma$  est commune à deux sous-domaines  $\mathcal{D}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}^{(2)}$ . Cette frontière peut être une coupure artificiellement introduite dans le domaine de calcul  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{(1)} \cup \mathcal{D}^{(2)}$ , ou bien encore une ligne ou surface de discontinuité pour les variables fondamentales  $\bar{U}$  définissant, dans le domaine  $\mathcal{D}$ , l'état du système physique considéré. Si la frontière est mobile, la vitesse normale de déplacement d'un point  $P$  de  $\Sigma$  est :  $\bar{W} = W^{(1)} \bar{v}^{(1)} = W^{(2)} \bar{v}^{(2)}$  ( $W^{(1)} = -W^{(2)}$ ,  $\bar{v}^{(1)} = -\bar{v}^{(2)}$ ). Les nombres,  $M$  et  $N$ , des inconnues relatives aux sous-domaines  $\mathcal{D}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}^{(2)}$  peuvent être a priori différents. Ces inconnues, notées  $\bar{U}^{(1)}$  et  $\bar{U}^{(2)}$ , sont les solutions de deux systèmes hyperboliques distincts, de la forme (2.1), auxquels correspondent les systèmes quasi-linéaires suivants :

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \bar{A}_j \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}^{(1)} \\ \bar{B}_0 \frac{\partial \bar{g}}{\partial t} + \bar{B}_j \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}^{(2)} \end{array} \right.$$

On notera  $\lambda$  et  $\mu$  les valeurs propres solutions des deux équations caractéristiques, de la forme (2.3), définies dans les deux sous-domaines  $\mathcal{D}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}^{(2)}$  ( $\lambda = \lambda(\bar{v}_1)$ ,  $\mu = \mu(\bar{v}_2)$ ). Parmi les  $M$  (resp.  $N$ ) valeurs propres  $\lambda$  (resp.  $\mu$ ),  $p$  (resp.  $q$ ) valeurs vérifient les inégalités (2.8) soit :

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{M-p} < W^{(1)} < \lambda_{M-p+1} \dots \leq \lambda_M \quad a) \\ \mu_1 \leq \dots \leq \mu_{N-q} < W^{(2)} < \mu_{N-q+1} \dots \leq \mu_N \quad b) \end{array} \right.$$

Dans ces conditions,  $p$  relations de compatibilité doivent être employées dans le sous-domaine  $\mathcal{D}^{(1)}$  pour le calcul des  $M$  composantes du vecteur  $\bar{f}$  au point  $P$  de  $\Sigma$ , et  $q$  relations sont à utiliser dans le sous-domaine  $\mathcal{D}^{(2)}$  pour le calcul des  $N$  composantes du vecteur  $\bar{g}$  au même point  $P$ . Soit au total  $(p+q)$  relations pour déterminer  $(M+N)$  inconnues auxquelles il faut éventuellement ajouter la vitesse normale de déplacement du point  $P$  ( $W^{(1)}$  ou  $W^{(2)}$ ). Le problème général du raccord des deux sous-domaines  $\mathcal{D}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}^{(2)}$  ne peut être déterminé que dans la mesure où les  $(p+q)$  relations de compatibilité peuvent être complétées par  $\ell$  relations supplémentaires que nous appellerons conditions de raccord, l'entier  $\ell$  étant donné par :

$$(2.16) \quad \ell = M + N + \mathcal{E} - p - q$$

avec  $\mathcal{E} = 1$  lorsque la vitesse  $W$  est une inconnue et  $\mathcal{E} = 0$  dans le cas contraire.

On peut préciser le dénombrement des relations de compatibilité à utiliser et des conditions de raccord dans le cas particulier, mais important, où les deux systèmes (2.14) sont identiques dans les deux sous-domaines  $\mathcal{D}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}^{(2)}$  ( $M=N$ ). Nous envisagerons successivement le cas où  $\Sigma$  est une coupure artificielle, puis le cas où  $\Sigma$  est une ligne ou une surface de discontinuité.

- Cas d'une coupure :

Les conditions de raccord traduisent alors la continuité des  $M$  inconnues  $U_i$ , au point  $P$  de la frontière  $\Sigma$ , soit  $M$  relations :  $U_i^{(1)} = U_i^{(2)}$ ,  $i = 1, \dots, M$ . La continuité de  $\bar{U}$  a pour conséquence immédiate que les valeurs propres définies dans  $\mathcal{D}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}^{(2)}$  et les vecteurs propres associés,  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$ , sont liés par les relations :

$$(2.17) \quad \begin{cases} a) \quad \lambda_k = -\mu_{M-k+1} \\ b) \quad \bar{\alpha}_k = \bar{\beta}_{M-k+1} \end{cases} \quad k = 1, \dots, M$$

La relation (2.17a) indique que :  $q = M - p$ . Supposons d'abord que  $W^{(1)}$  ne soit pas égal à l'une des valeurs propres  $\lambda_k$ . La relation (2.17b) montre que les  $p$  relations de compatibilité à utiliser dans  $\mathcal{D}^{(1)}$  et les  $q = M - p$  relations de compatibilité à utiliser dans  $\mathcal{D}^{(2)}$  sont linéairement indépendantes ; ces  $M$  relations de compatibilité indépendantes permettent donc de déterminer la solution au point  $P$ , la vitesse  $W^{(1)}$  étant donnée arbitraire. Lorsque la vitesse normale de déplacement du point  $P$  est égale à une valeur propre d'ordre  $r$ , à cette valeur propre correspondent  $r$  relations de compatibilité utilisables dans chaque sous-domaine, mais ce sont les mêmes relations dans les deux sous-domaines puisqu'elles ne font intervenir que des dérivées contenues dans le plan tangent en  $P$  à  $\Sigma$  et donc identiques par continuité. Au total il reste  $M$  relations de compatibilité indépendantes utilisables.

- Cas d'une discontinuité :

Le système d'équations (2.1) étant sous forme conservative et valable dans les deux sous-domaines  $\mathcal{D}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}^{(2)}$ , il est possible de chercher la solution  $\bar{U}$  comme solution faible du système (2.1) (voir, par exemple, [16]) admettant des discontinuités à travers une surface  $\Sigma$  de position inconnue. Les relations de saut associées au système (2.1) s'écrivent :

$$(2.18) \quad W^{(1)} \bar{U}^{(1)} - \nu_j^{(1)} \bar{F}_j^{(1)} = W^{(2)} \bar{U}^{(2)} - \nu_j^{(2)} \bar{F}_j^{(2)}$$

où l'indice supérieur se rapporte au sous-domaine correspondant à chacune des deux faces de  $\Sigma$ . Ces  $M$  relations scalaires, non linéaires par rapport aux variables  $U_i$ , constituent les conditions de raccord entre les deux sous-domaines  $\mathcal{D}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}^{(2)}$ . Si la position de  $W^{(1)}$  (ou de  $W^{(2)} = -W^{(1)}$ ) par rapport aux  $2M$  valeurs propres  $\lambda_k$  et  $\mu_k$  est arbitraire, le problème du raccord de  $\mathcal{D}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}^{(2)}$  est, en général, sur ou sous-déterminé. En effet, contrairement à ce qui se passe lorsque  $\bar{U}$  est continu à travers  $\Sigma$ , la position de  $W^{(1)}$  par rapport aux valeurs propres  $\lambda_k$  définies dans  $\mathcal{D}^{(1)}$  n'implique, a priori, aucune position particulière de  $W^{(2)}$  par rapport aux valeurs propres  $\mu_k$  définies dans  $\mathcal{D}^{(2)}$ . Dans l'hypothèse où les  $M$  relations de saut constituent bien  $M$  relations indépendantes et non dégénérées, alors le raccord des deux sous-domaines  $\mathcal{D}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}^{(2)}$  sera possible si le nombre de relations de compatibilité utilisées dans les deux sous-domaines est :  $M + 1$ .

Cette situation favorable se rencontre lorsque la discontinuité  $\Sigma$  constitue un k-choc, c'est-à-dire lorsqu'il existe un entier  $k$  tel que les valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  vérifient la "condition d'entropie" de Lax [17] :

$$(2.19) \quad \begin{cases} \lambda_{k-1} < W^{(1)} < \lambda_k \\ \mu_{M-k} < W^{(2)} < \mu_{M-k+1} \end{cases}$$

Dans le sous-domaine  $\mathcal{D}^{(1)}$ , on utilise alors  $(M-k+1)$  relations de compatibilité et on en utilise  $k$  dans le sous-domaine  $\mathcal{D}^{(2)}$ , soit un total de  $(M+1)$ . Jointes aux  $M$  relations de saut (2.18), ces  $(2M+1)$  relations de compatibilité permettent de calculer les  $(2M+1)$  inconnues au point  $P$  de  $\Sigma$ , à savoir : les  $M$  composantes du vecteur  $\vec{U}^{(1)}$  dans le sous-domaine  $\mathcal{D}^{(1)}$ , les  $M$  composantes du vecteur  $\vec{U}^{(2)}$  dans le sous-domaine  $\mathcal{D}^{(2)}$  et la vitesse normale de déplacement de la discontinuité  $\Sigma$ .

Dans le cas où  $\Sigma$  est une k-discontinuité de contact, c'est-à-dire lorsqu'il existe un entier  $k$  tel que les valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  vérifient les conditions :

$$(2.20) \quad \lambda_k = W^{(1)} = -W^{(2)} = -\mu_{M-k+1}$$

la conclusion est, en revanche, moins évidente. En effet, le nombre total de relations de compatibilité à utiliser dans les sous-domaines  $\mathcal{D}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}^{(2)}$  est :  $M+r$ , où  $r$  désigne l'ordre de la valeur propre  $\lambda_k$  (ou  $\mu_{M-k+1}$ ). La vitesse  $W^{(1)}$  (ou  $W^{(2)}$ ) étant déterminée par la relation (2.20), le problème du raccord des deux sous-domaines  $\mathcal{D}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}^{(2)}$  n'est donc parfaitement déterminé que dans la mesure où, parmi les  $M$  relations de saut (2.18),  $r$  relations sont dégénérées, c'est-à-dire sont vérifiées automatiquement et disparaissent.

### 3 - APPLICATION AUX ECOULEMENTS DE FLUIDE PARFAIT COMPRESSIBLE -

La technique générale de traitement des frontières externes ou internes décrite au paragraphe 2 pour des problèmes hyperboliques quelconques est développée ici pour les équations d'Euler complètes et pour quelques systèmes pseudo-stationnaires.

#### 3.1 - Système des équations d'Euler -

Ces équations sont rappelées au paragraphe 4.2. En écoulement plan, les quatre valeurs propres relatives à une direction  $\vec{\xi}$  sont données par les expressions :

$$(3.1) \quad \lambda_1 = V_{\xi} - a, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = V_{\xi}, \quad \lambda_4 = V_{\xi} + a, \quad V_{\xi} = \vec{V} \cdot \vec{\xi}$$

Les relations de compatibilité s'écrivent très simplement sous la forme (2.13)

en choisissant  $\vec{f} = (\rho, V_{\xi}, V_{\eta}, p)^T$ , où  $\vec{\eta}$  est le vecteur unitaire normal à  $\vec{\xi}$  et  $V_{\eta} = \vec{V} \cdot \vec{\eta}$ , et avec  $\vec{\omega}_1 = (0, -\rho a, 0, 1)$ ,  $\vec{\omega}_2 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $\vec{\omega}_3 = (-a^2, 0, 0, 1)$  et  $\vec{\omega}_4 = (0, \rho a, 0, 1)$ .

En ce qui concerne le nombre  $m$  de conditions aux limites à imposer sur une frontière, mobile ou non, le principe énoncé au paragraphe 2.1 conduit à une discussion simple où n'intervient que le nombre de Mach normal relatif  $M_p' = (V_p - W)/a$  :

$$\begin{array}{ll} M_p' < -1 & \text{(frontière amont supersonique)} : m = 4 \\ -1 \leq M_p' < 0 & \text{(frontière amont subsonique ou sonique)} : m = 3 \\ 0 \leq M_p' < 1 & \text{(frontière aval subsonique, ou paroi)} : m = 1 \\ 1 \leq M_p' & \text{(frontière aval supersonique ou sonique)} : m = 0 \end{array}$$

Considérons plus en détail le cas d'une frontière aval subsonique et le cas d'une paroi. Dans ces deux cas, il faut une condition aux limites, et on doit utiliser les relations de compatibilité associées à  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  qui s'écrivent, sous la forme (2.13) :

$$(3.2) \quad \begin{cases} p^{n+1} - (a^2)^n p^{n*} = p^* - (a^2)^n p^* \\ V_{\eta}^{n+1} = V_{\eta}^* \\ p^{n+1} + (\rho a)^n V_p^{n+1} = p^* + (\rho a)^n V_p^* \end{cases}$$

et où, rappelons-le, l'astérisque désigne des valeurs fournies directement par le schéma numérique à la frontière. Pour une frontière aval subsonique, on utilise en général comme condition aux limites la donnée de la pression ; connaissant  $p^{**}$ , on tire immédiatement  $\rho^{**}$ ,  $V_p^{**}$  et  $V_p^{**}$  du système (3.2). Pour une paroi dont la vitesse de déplacement  $W$  est donnée, la condition de glissement s'écrit  $V_p^{**} = W$  et on détermine très facilement  $p^{**}$ ,  $\rho^{**}$ ,  $V_p^{**}$  à l'aide de (3.2).

La technique de raccord de deux sous-domaines s'applique au traitement d'un choc  $\Sigma$  lorsqu'on résout les équations d'Euler complètes dans chacun des deux sous-domaines, la condition d'entropie de Lax (2.19) étant satisfaite. Pour fixer les idées, on suppose que le fluide traverse  $\Sigma$  de  $\mathcal{D}^{(1)}$  vers  $\mathcal{D}^{(2)}$  ;  $\Sigma$  est donc une frontière aval supersonique de  $\mathcal{D}^{(1)}$  et une frontière amont subsonique de  $\mathcal{D}^{(2)}$ . On utilise les quatre relations de compatibilité du côté de  $\mathcal{D}^{(1)}$ , ce qui signifie que les valeurs  $\bar{U}^{(1)*}$  fournies par le schéma sont conservées sans modification, soit  $\bar{U}^{(1)*} = \bar{U}^{(1)*}$ , et on utilise une relation de compatibilité (celle associée à  $\mu_4$ , avec les notations du § 2.2) du côté de  $\mathcal{D}^{(2)}$  ; cette relation s'écrit :

$$(3.3) \quad p^{(2)*} + (\rho a)^{(2)*} V_p^{(2)*} = p^{(2)*} + (\rho a)^{(2)*} V_p^{(2)*}$$

et forme avec les quatre relations de Rankine-Hugoniot un système non linéaire aux inconnues  $\bar{U}^{(2)*}$  et  $W^{(2)}$ .

Pour une surface de glissement, la technique de raccord s'applique également sans problème car deux relations de saut (en écoulement plan) sont dégénérées, et il ne subsiste que les conditions de continuité de la vitesse normale et de la pression.

Ces techniques sont mises en oeuvre au paragraphe 4, dans un problème d'interaction choc-couche limite, pour le raccord de sous-domaines Euler à travers un choc et à travers une coupure, ainsi que pour les traitements de la frontière aval et de l'axe de symétrie.

### 3.2 - Système pseudo-instationnaire "H" -

Ce système, intéressant pour le calcul des écoulements stationnaires iso-énergétiques, est formé des équations instationnaires exactes de continuité et de quantité de mouvement. L'équation de l'énergie instationnaire n'est pas utilisée, mais elle est remplacée par l'équation de Bernoulli stationnaire qui détermine explicitement la pression comme une fonction des variables de base qui sont la masse volumique et la quantité de mouvement [10], [11].

Ce système "H" est hyperbolique, et, en écoulement plan, les trois valeurs propres, qui sont distinctes, s'écrivent :

$$(3.4) \quad \lambda_{1,3} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} V_\xi \mp \sqrt{\frac{a^2}{\gamma} + \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} V_\xi\right)^2}, \quad \lambda_2 = V_\xi$$

Avec les variables  $\bar{F} = (V_\xi, V_\eta, p)^T$ , les coefficients des relations de compatibilité (2.13) ont pour expression :

$$\bar{\omega}_1 = \left(\rho\left(\lambda_1 - \frac{V_\xi}{\gamma}\right), 0, 1\right), \quad \bar{\omega}_2 = (0, 1, 0), \quad \bar{\omega}_3 = \left(\rho\left(\lambda_3 - \frac{V_\xi}{\gamma}\right), 0, 1\right)$$

Le nombre de relations de compatibilité à utiliser en un point d'une frontière est : zéro si  $W < \lambda_1$  (il faut donc imposer toutes les variables), un si  $\lambda_1 \leq W < \lambda_2$  (il faut deux conditions aux limites), deux si  $\lambda_2 \leq W < \lambda_3$  (il faut une condition aux limites), et trois si  $\lambda_3 \leq W$  (pas de condition aux limites). Ces divers cas ne se ramènent pas aux positions du nombre de Mach normal relatif,  $M_p'$ , par rapport à -1, 0, +1, lorsque  $W \neq 0$ . Remarquons que, la méthode n'étant valable que pour le calcul d'écoulements



stationnaires, à convergence  $W$  doit tendre vers zéro, et on retrouve une classification des divers cas en fonction uniquement du nombre de Mach normal (algébrique)  $M_p = \bar{V} \cdot \bar{\gamma} / a$ .

Les relations de saut à travers un choc correspondant au système "H" diffèrent des relations de Rankine-Hugoniot habituelles par le fait que c'est l'enthalpie totale (par définition du système "H") et non l'enthalpie totale relative, qui se conserve à travers le choc. La condition de Lax (2.19) s'écrit :

$$(3.5) \quad a) \quad W^{(1)} < \lambda_1, \quad b) \quad \mu_3 < W^{(2)} < \mu_4$$

D'après la condition (3.5a), il est possible d'avoir un choc avec un nombre de Mach normal relatif amont inférieur à l'unité. L'étude des relations de choc "H" montre qu'à travers un choc vérifiant (3.5), la pression statique augmente, la vitesse normale diminue, comme c'est le cas avec les relations de Rankine-Hugoniot, mais que la masse volumique peut diminuer. L'entropie d'une particule fluide traversant le choc peut également diminuer. Bien entendu ces comportements non physiques disparaissent à l'état stationnaire.

Quelques exemples d'applications du système "H" sont présentés ci-dessous. Ils ont été obtenus par la méthode explicite de discrétisation directe dans le plan physique présentée au paragraphe 4.3. Le traitement numérique d'une coupure a d'abord été mis au point pour un écoulement transsonique, avec choc, dans un canal plan. Le maillage utilisé est continu à la traversée de la coupure. La figure 1 représente les courbes iso-nombre de Mach obtenues à convergence. On notera que ces courbes ont des tangentes parfaitement continues sur la coupure y compris dans la région où le choc est capturé.

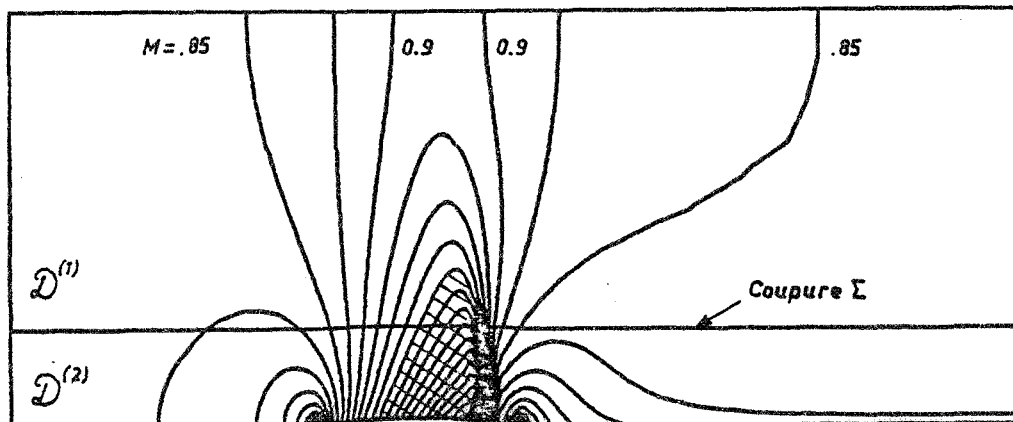
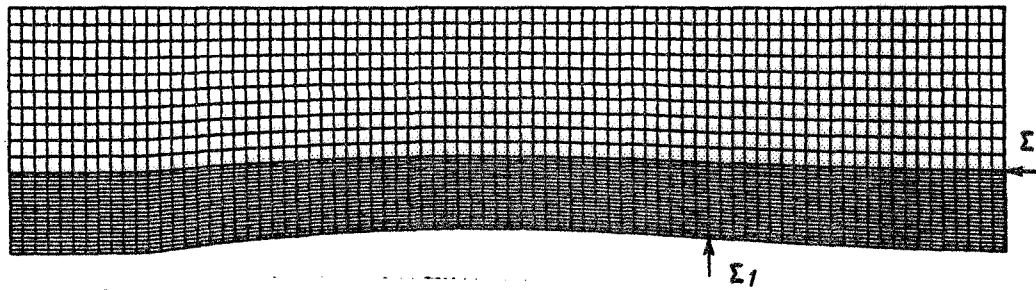


Fig. 1 - Profil circulaire dans un canal - Courbes iso-Mach

Les autres essais numériques ont porté sur des écoulements dans une tuyère plane utilisée à l'ONERA pour l'étude expérimentale de l'interaction onde de choc-couche limite. Cette géométrie correspond également au calcul présenté au paragraphe 4. On montre d'abord un calcul de tuyère complète, en régime amorcé sans choc. Le domaine de calcul a été séparé en deux sous-domaines à maillages très différents (fig. 2a). Le rapport entre la taille des mailles de part et d'autre de la coupure est égal à 4. Etant donné que l'on ne discrétise pas à travers la coupure, la différence de taille des mailles à travers la coupure peut être quelconque sans qu'il y ait perte de précision théorique du schéma numérique. La figure 2b représente les courbes iso-nombre de Mach obtenues à convergence. Ce premier calcul a permis de définir les grandeurs aérodynamiques dans une section supersonique située en aval du col sonique.



a) Maillage des deux sous-domaines

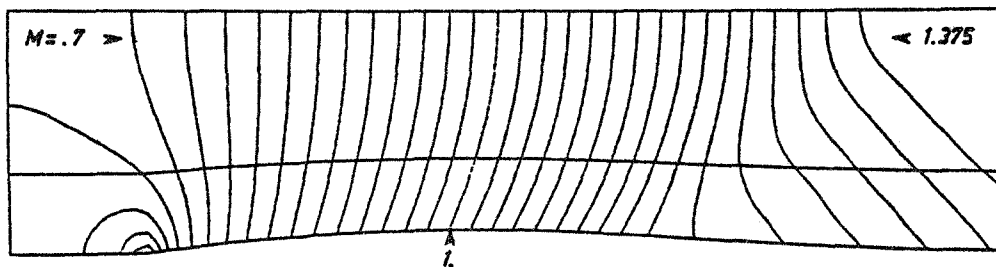
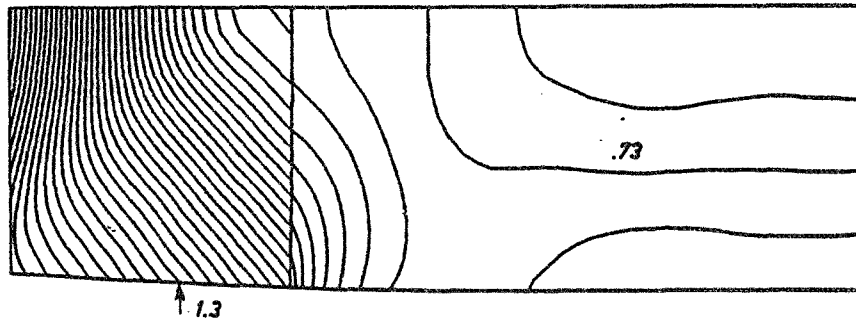
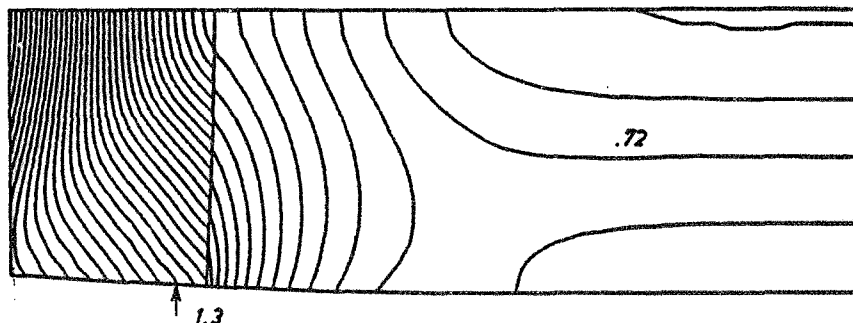
b) Courbes iso-Mach (  $\Delta M = .025$  )

Fig. 2 - Ecoulement amorcé sans choc dans la tuyère S8

a) Courbes iso-Mach (  $\Delta M = .005$  ) pour  $p_2 = .67674 p_1$ b) Courbes iso-Mach (  $\Delta M = .005$  ) pour  $p_2 = .68674 p_1$ Fig. 3 - Ecoulement amorcé avec choc dans la tuyère S8  
(choc amorce)

Pour les deux calculs d'écoulements avec choc, le domaine de calcul  $\mathcal{D}$  a été limité au divergent de la tuyère entre la section précédemment définie et une section située dans une région où les deux parois de la tuyère sont pratiquement parallèles, ce qui permet de justifier l'hypothèse d'une pression statique constante dans cette section. Le domaine de calcul  $\mathcal{D}$  a été divisé en deux sous-domaines  $\mathcal{D}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}^{(2)}$  dont la frontière commune mobile est le choc  $\Sigma$ , ligne de maillage particulière pour  $\mathcal{D}^{(1)}$  et pour  $\mathcal{D}^{(2)}$ . Le maillage de chaque sous-domaine doit donc se déformer au cours des itérations pour suivre le déplacement du choc, comme décrit au paragraphe 4.3.1. Un premier calcul d'écoulement avec choc a été effectué pour une pression aval  $p_2 = 0,67674 p_i$ , où  $p_i$  désigne la pression d'arrêt à l'infini amont (fig. 3a). L'approximation monodimensionnelle de la loi des aires a été utilisée pour déterminer les conditions initiales, y compris la position du choc. On a constaté que cette position a peu varié au cours des itérations. Les résultats de ce premier essai ont servi de conditions initiales à un second calcul d'écoulement avec choc, réalisé pour une pression aval plus élevée:  $p_2 = 0,68674 p_i$  (fig. 3b). L'onde de choc, et donc le maillage, se sont alors nettement déplacés au cours des itérations.

### 3.3 - Raccords entre systèmes pseudo-instationnaires différents -

Il peut être intéressant pour le calcul de certains écoulements, d'utiliser une méthode mettant en oeuvre des systèmes pseudo-instationnaires distincts dans deux sous-domaines  $\mathcal{D}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}^{(2)}$ . Par exemple, s'il existe une région où l'écoulement est irrotationnel, on peut envisager d'utiliser une méthode à enthalpie totale et entropie constantes (méthode pseudo-instationnaire "HS1" ou "HS2", [10]) dans cette région, et de résoudre les équations d'Euler, ou le système "H" en dehors. Aucun calcul n'a encore été effectué dans cette voie, mais il semble intéressant de montrer la possibilité d'un tel raccord, dans le cas, par exemple, de la méthode "HS2".

La formulation "HS2" correspond au système (2.1) avec, en écoulement plan :

$$(3.6) \quad \bar{U} = \begin{pmatrix} \sigma u \\ \sigma v \end{pmatrix}, \quad \bar{F}_1 = \begin{pmatrix} \rho u^2 + p \\ \rho u v \end{pmatrix}, \quad \bar{F}_2 = \begin{pmatrix} \rho u v \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix}$$

où  $\sigma$ ,  $p$  et  $\rho$  sont des fonctions connues du module  $V$  de la vitesse. La fonction  $\sigma$  est choisie de telle sorte que le système soit hyperbolique.

Pour une direction  $\bar{\xi}$  donnée, l'équation caractéristique (2.3) s'écrit :

$$(3.7) \quad \sigma^2 A \lambda^2 - \sigma \rho V_{\bar{\xi}} \left( 1 + A - \frac{V^2}{a^2} \right) \cdot \lambda + \rho^2 V^2 \left( 1 - \frac{V_{\bar{\xi}}^2}{a^2} \right) = 0$$

avec

$$A = \frac{d(\sigma V)}{\sigma dV} = 1 + \frac{\sigma'}{\sigma} V$$

L'étude de ce trinôme en  $\lambda$  indique que le système n'est pas hyperbolique pour n'importe quel choix de la fonction  $\sigma$ . En prenant par exemple :  $\sigma = \rho(V) \cdot V_0/V$  où  $V_0$  est une vitesse de référence donnée, les deux valeurs propres sont réelles et ont pour expression :

$$(3.8) \quad \lambda_{1,2} = \frac{V}{V_0} \left\{ V_{\bar{\xi}} \left( 1 - \frac{1}{2M^2} \right) \pm \sqrt{a^2 + \frac{1-4M^2}{4M^2} V_{\bar{\xi}}^2} \right\}, \quad \left( M = \frac{V}{a} \right)$$

Avec les variables  $\bar{f} = (V_{\bar{\xi}}, V_{\eta})$ , les coefficients des relations de compatibilité s'écrivent :

$$(3.9) \quad \bar{\omega}_{1,2} = \left( -\lambda_{1,2} \sigma + \rho V_{\bar{\xi}} \left( 1 + \frac{V_{\eta}^2}{V^2} \right), \quad \rho V_{\eta} \left( 1 - \frac{V_{\bar{\xi}}^2}{V^2} \right) \right)$$

Traitement d'une coupure "HS2-H" :

Considérons par exemple le cas d'un écoulement transsonique avec choc autour d'un profil. Le domaine de calcul peut être divisé en deux sous-domaines : un

sous-domaine  $\mathcal{D}^{(1)}$  où l'écoulement est potentiel et où la méthode "HS2" est utilisée, et un sous-domaine  $\mathcal{D}^{(2)}$  où l'écoulement peut être rotationnel et où le système "H" est résolu.

Le problème du raccord à travers la coupure  $\Sigma$ , supposée fixe est alors correctement posé lorsque le fluide va de  $\mathcal{D}^{(1)}$  vers  $\mathcal{D}^{(2)}$  et lorsqu'on impose la continuité de l'écoulement (continuité de la vitesse et de la masse volumique, assurant la continuité de l'entropie, soit trois relations). En effet, on dispose de  $p$  relations de compatibilité dans  $\mathcal{D}^{(1)}$  et de  $q$  dans  $\mathcal{D}^{(2)}$ , avec  $p=1$ ,  $q=1$  si la vitesse normale est subsonique, et avec  $p=2$ ,  $q=0$  si la vitesse normale est supersonique. On a donc un système formé de deux relations de compatibilité et de trois conditions de raccord, pour déterminer les cinq inconnues (deux dans  $\mathcal{D}^{(1)}$ , trois dans  $\mathcal{D}^{(2)}$ ).

#### Traitement d'un choc "HS2-H" :

Soit maintenant un choc mobile  $\Sigma$  séparant un sous-domaine amont  $\mathcal{D}^{(1)}$  où l'écoulement est irrotationnel et où l'emploi du système "HS2" est justifié, et un sous-domaine aval  $\mathcal{D}^{(2)}$  où l'écoulement est rotationnel et où la méthode "H" est utilisée. En supposant faible la vitesse  $W$  de  $\Sigma$ , le problème est alors bien posé en utilisant :

- les deux relations de compatibilité dans  $\mathcal{D}^{(1)}$ , c'est-à-dire en conservant les valeurs  $U^*$  fournies par le schéma ;
- la relation de compatibilité associée à  $\mu_4$  dans  $\mathcal{D}^{(2)}$  ;
- les trois relations de saut du système "H".

L'hypothèse " $W$  faible" permet d'assurer que l'on a bien deux relations de compatibilité utilisables dans  $\mathcal{D}^{(1)}$ . On dispose alors de six relations permettant de calculer les deux inconnues dans  $\mathcal{D}^{(1)}$ , les trois inconnues dans  $\mathcal{D}^{(2)}$ , ainsi que  $W$ .

#### 4 - APPLICATION A UN PROBLEME D'INTERACTION CHOC-COUCHE LIMITE -

##### 4.1 - Généralités -

Nous présentons maintenant une application de l'approche par domaines au traitement numérique du problème de l'interaction choc-couche limite turbulente dans un canal en régime transsonique. Ce problème a déjà été abordé, comme ici, par la résolution des équations de Navier-Stokes moyennes, mais en ne considérant qu'un domaine de calcul, le choc étant capturé dans tout le domaine (par ex. [18], [19] et [20]).

L'approche par domaines permet d'une part de découpler les problèmes de maillage dans la région de fluide parfait et dans la région de fluide visqueux, et d'autre part d'ajuster le choc sur sa plus grande partie. Il en résulte une économie de points de maillage et une meilleure précision.

Le canal considéré est plan et symétrique. Le domaine de calcul est donc limité de façon naturelle par la paroi en bas et l'axe de symétrie en haut, et en outre de façon plus empirique par une section amont et une section aval prises assez loin de la zone d'interaction.

Ce domaine (fig. 6) est divisé en trois sous-domaines de la façon suivante : une coupure horizontale sépare un domaine, vers le bas, qui contient la couche visqueuse et que nous noterons  $\mathcal{D}_V$ , d'un domaine, vers le haut, où les effets visqueux sont négligeables (domaine  $\mathcal{D}_P$ ), et ce dernier est lui-même divisé en deux sous-domaines  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  par l'onde de choc. Autrement dit l'onde de choc est ajustée dans  $\mathcal{D}_P$ , et capturée dans  $\mathcal{D}_V$ , ce qui permet de ne pas resserrer le maillage près du choc dans  $\mathcal{D}_P$  tout en ayant une précision bien supérieure à celle que donnerait une méthode de capture.

Il serait souhaitable d'ajuster le choc également dans  $\mathcal{D}_V$  ; cette solution est étudiée mais il faut résoudre la difficulté que présente la formation progressive du choc par coalescence d'ondes de compression. Il faut noter aussi que l'ajustement du choc dans  $\mathcal{D}_V$  ne dispenserait pas d'avoir un maillage très resserré dans cette zone afin de bien représenter ces ondes de compression qui résultent de l'interaction choc-couche limite.

Dans les 2 sous-domaines qui constituent  $\mathcal{D}_p$  on résout les équations d'Euler complètes, et dans le domaine  $\mathcal{D}_V$  on résout les équations de Navier-Stokes moyennes décrites au paragraphe 4.2 avec une approximation de couche mince (§ 4.3.3). Le choc dans  $\mathcal{D}_p$  et la coupure horizontale sont traités par la technique de raccord de domaines de fluide parfait présentée au paragraphe 3.1 (les effets dissipatifs étant négligeables au voisinage même de la coupure du côté de  $\mathcal{D}_V$ ). Le point triple, intersection du choc et de la coupure, nécessite un traitement particulier décrit au paragraphe 4.3.5.

#### 4.2 - Equations et conditions aux limites -

Nous rappelons tout d'abord la forme habituelle des équations de Navier-Stokes moyennes dans le cas d'une modélisation de type "viscosité tourbillonnaire" (voir par ex. [21] pour une discussion plus complète).

Les variables de base sont les valeurs moyennes de la masse volumique,  $\rho$ , de la densité de quantité de mouvement,  $\rho \bar{V}$  ( $\bar{V}$  est donc la vitesse moyenne pondérée par la masse), de l'énergie interne volumique,  $\rho e$  ( $e$  est donc l'énergie interne spécifique moyenne pondérée par la masse).

En écoulement plan et en coordonnées cartésiennes  $x, y$ , les équations de Navier-Stokes moyennes s'écrivent, sous forme conservative :

$$(4.1) \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial y} = \frac{\partial \bar{G}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}_2}{\partial y}$$

où  $\bar{U}$  est le vecteur des variables de base :

$$(4.2) \quad \bar{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T$$

$u, v$  étant les composantes cartésiennes de la vitesse moyenne  $\bar{V}$  et  $E$  l'énergie totale moyenne :  $E = e + \bar{V}^2/2$ .

Tous les termes dissipatifs sont rassemblés au second membre de (4.1) ; les équations d'Euler pour un fluide parfait s'obtiennent en égalant le premier membre à zéro. On a les expressions suivantes pour les termes de fluide parfait  $\bar{F}_1, \bar{F}_2$  :

$$(4.3) \quad \begin{cases} \bar{F}_1 = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (\rho E + p) u)^T \\ \bar{F}_2 = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (\rho E + p) v)^T \end{cases}$$

où  $p$  est la valeur moyenne de la pression. Pour un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes de rapport  $\gamma$ , on a :

$$(4.4) \quad p = (\gamma - 1) \rho e$$

les termes dissipatifs  $\bar{G}_1, \bar{G}_2$  sont donnés par les relations :

$$(4.5) \quad \begin{cases} \bar{G}_1 = (0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, u \tau_{xx} + v \tau_{xy} - q_x)^T \\ \bar{G}_2 = (0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, u \tau_{xy} + v \tau_{yy} - q_y)^T \end{cases}$$

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{xx} = \frac{2}{3} (\mu + \mu_T) \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \tau_{xy} = (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yy} = \frac{2}{3} (\mu + \mu_T) \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ q(x, y) = -\gamma \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \frac{\partial e}{(\partial x, \partial y)} \end{array} \right.$$

$\mu$  est la viscosité moléculaire, variant avec la température selon la loi de Sutherland et  $\mu_T$  est la viscosité "tourbillonnaire" ;  $Pr$  est le nombre de Prandtl,  $Pr_T$  le nombre de Prandtl turbulent. Dans la phase présente de cette étude, consacrée à la mise au point de la méthode de calcul par domaines, on se contente d'un modèle algébrique simple sachant qu'un tel modèle ne peut être quantitativement correct dans une zone de forte interaction. On utilise le modèle, du type longueur de mélange, de Michel et al. [22] pour des couches limites non décollées :

$$(4.7) \quad \mu_T = \rho \ell^2 F^2(\zeta) \left| \partial V_1 / \partial \eta \right|$$

où  $V_1$  est la composante de vitesse tangentielle à la paroi,  $\eta$  la distance normale à la paroi. La longueur de mélange  $\ell$ , rapportée à l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite, est donnée comme une fonction universelle de  $\eta/\delta$  :

$$(4.8) \quad \frac{\ell}{\delta} = 0,085 \ln \left[ \frac{K \eta}{(0,085 \delta)} \right] \quad K = 0,41$$

La fonction  $F$ , dite fonction correctrice de sous-couche visqueuse, dépend du frottement total  $\tau$  :  $\tau = (\mu + \mu_T) \partial V_1 / \partial \eta$ , par l'intermédiaire de la variable  $\zeta$  :  $\zeta = \rho \ell^2 |\tau| / \mu^2$  :

$$(4.9) \quad F(\zeta) = 1 - \exp \left\{ -\sqrt{\zeta} / (26 K) \right\}$$

La relation (4.7) qui donne  $\mu_T$  est donc implicite puisque  $F$  dépend de  $\mu_T$ , mais on peut la résoudre numériquement une fois pour toutes et tabuler  $\mu_T / \mu$  comme fonction de la variable  $Z = (\rho \ell^2 / \mu) \left| \partial V_1 / \partial \eta \right|$ . Dans le cas des équations de Navier-Stokes, on remplace, dans les expressions ci-dessus,  $\partial V_1 / \partial \eta$  par la quantité  $(\partial u / \partial y - \partial v / \partial x)$  qui est égale à l'opposé du tourbillon.

En ce qui concerne les conditions aux limites à associer aux équations de Navier-Stokes ou aux équations d'Euler, certaines sont dictées par la physique ou la géométrie du problème (conditions à la paroi, condition de symétrie), et les autres doivent être choisies de façon partiellement empirique en s'appuyant sur l'interprétation physique du problème et sur la nature mathématique des équations, on trouvera une discussion générale de cette question dans [21].

À la paroi, on impose l'adhérence du fluide ( $u = v = 0$ ) et un flux de chaleur nul (paroi adiabatique,  $\partial e / \partial \eta = 0$ ).

Sur l'axe de symétrie ( $y = 0$ ) les conditions de symétrie sont :  $v = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial y} = 0$ .

Dans la section d'entrée, où l'écoulement est supersonique sauf dans un voisinage de la paroi, toutes les propriétés de l'écoulement (c'est-à-dire  $U$ ) sont fixées.

Dans la section de sortie où l'écoulement est subsonique, on impose la valeur de la pression comme on le ferait dans un calcul de fluide parfait. La position du choc dans le canal dépend essentiellement de cette condition.

#### 4.3 - Méthode numérique -

##### 4.3.1 - Schéma de différences finies -

On utilise un schéma prédicteur-correcteur explicite qui constitue une application du schéma de MacCormack [23] directement dans le plan physique en maillage curviligne quelconque. Ce schéma a déjà été présenté pour les équations d'Euler [11] et pour les équations de Navier-Stokes [21], [24]. Dans le présent calcul nous avons utilisé dans  $\mathcal{D}_v$  une approximation de type "couche mince" pour les termes dissipatifs qui est introduite directement sur les équations discrétisées.

Rappelons le principe de ce schéma. Pour toute grandeur  $\phi$  connue aux noeuds du maillage, on obtient des approximations précises au premier ordre des dérivées  $\partial\phi/\partial x$  et  $\partial\phi/\partial y$  en un noeud M en supposant que  $\phi$  varie linéairement en  $x, y$  sur un triangle MPQ, où P et Q sont deux autres noeuds voisins de M (et non alignés avec M) :

$$(4.10) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_M \approx (\delta_x \phi)_M = (y_{MP} \phi_{MQ} - y_{MQ} \phi_{MP})/J \\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_M \approx (\delta_y \phi)_M = (-x_{MP} \phi_{MQ} + x_{MQ} \phi_{MP})/J \end{cases}, \quad J = y_{MP} x_{MQ} - y_{MQ} x_{MP}$$

où  $\phi_{MQ} = \phi(Q) - \phi(M)$ ,  $y_{MP} = y(P) - y(M)$ , etc...

Ce schéma ne fait donc appel qu'aux coordonnées cartésiennes des noeuds du maillage ; la relation qui existe entre cette méthode de discrétisation directe dans le plan physique et une méthode de transformation de coordonnées est discutée dans [11].

A partir des quatre noeuds voisins de M, soit les points N, S, E, O (fig. 4), on définit les opérateurs de type (4.10) suivants : d'une part  $\delta_x$  et  $\delta_y$  avec les points M, S, E, et d'autre part  $\tilde{\delta}_x$ ,  $\tilde{\delta}_y$  avec les points M, N, O (une autre variante est évidente). Le niveau de temps étant repéré par l'indice  $n$  ( $t^n = n \Delta t$ ), et la valeur prédicteur fournie par le ler pas étant notée  $\tilde{n}+1$ , le schéma s'écrit :

$$(4.11) \quad \begin{cases} a) \quad \bar{U}^{\tilde{n}+1} = \bar{U}^n - \Delta t \left[ \delta_x (\bar{F}_1 - \bar{G}_1)^n + \delta_y (\bar{F}_2 - \bar{G}_2)^n \right] \\ b) \quad \bar{U}^{\tilde{n}+1} = \frac{1}{2} \left\{ \bar{U}^n + \bar{U}^{\tilde{n}+1} - \Delta t \left[ \tilde{\delta}_x (\bar{F}_1 - \bar{G}_1)^{\tilde{n}+1} + \tilde{\delta}_y (\bar{F}_2 - \bar{G}_2)^{\tilde{n}+1} \right] \right\} \end{cases}$$

Pour discrétiser les dérivées premières de  $u, v, e$  qui apparaissent dans les termes dissipatifs  $\bar{G}_1, \bar{G}_2$ , on utilisera les opérateurs opposés à ceux utilisés

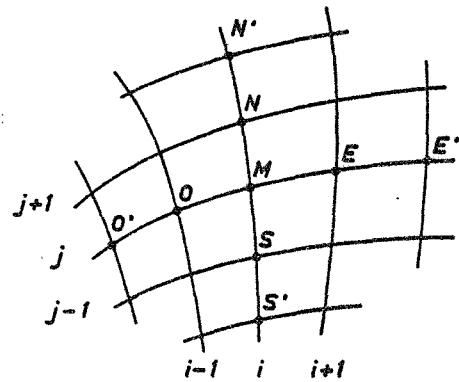


Fig. 4 - Discrétisation directe dans le plan physique

pour  $\partial \bar{G}_1 / \partial x$ ,  $\partial \bar{G}_2 / \partial y$ , c'est-à-dire  $\bar{\delta}_x$ ,  $\bar{\delta}_y$  au 1er pas et  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  au second pas. Le schéma est du second ordre en espace et en temps si le maillage est suffisamment régulier (c'est-à-dire si  $|\overline{ME} + \overline{MO}| = O(\overline{ME}^2)$  et  $|\overline{MS} + \overline{MN}| = O(\overline{MN}^2)$ ).

#### 4.3.2 - Viscosité artificielle -

Deux étapes supplémentaires de calcul sont éventuellement effectuées à la suite du correcteur (4.11.b) pour introduire une viscosité artificielle. La première étape, nécessaire à la capture des chocs, utilise la viscosité artificielle non linéaire de Lerat et Sidès [25], mais restreinte à une seule direction, celle des lignes de maillage du type  $OME$  ( $j = c/e$ ) qui suivent la direction principale de l'écoulement :

$$(4.12) \quad \bar{U}^{n+1,(1)} = \bar{U}^{n+1} + \varepsilon \frac{\Delta t}{\Delta X} \left\{ |\bar{U}_{ME}| \bar{U}_{ME} - |\bar{U}_{OM}| \bar{U}_{OM} \right\}^{n+1}$$

où  $\Delta X$  est de l'ordre de l'inverse du nombre total de mailles dans la direction des lignes  $j = c/e$ , et où  $\varepsilon$  est pris de l'ordre de l'unité.

La deuxième étape introduit une viscosité artificielle linéaire du 4e ordre [26], permettant d'amortir les oscillations de courte longueur d'onde sans perturber les zones à fort gradient de la solution :

$$(4.13) \quad \bar{U}^{n+1,(2)} = \bar{U}^{n+1,(1)} - \varepsilon_1 \left\{ \bar{U}_{EE'} + \bar{U}_{OO'} - 3 \bar{U}_{ME} - 3 \bar{U}_{MO} \right\}^{n+1,(1)} - \varepsilon_2 \left\{ \bar{U}_{NN'} + \bar{U}_{SS'} - 3 \bar{U}_{MN} - 3 \bar{U}_{MS} \right\}^{n+1,(1)}$$

où  $E', O', N', S'$  sont les points de maillage respectivement voisins de  $E, O, N, S$  indiqués sur la figure 4, et où les coefficients  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  sont pris de l'ordre de  $10^{-3}$ .

#### 4.3.3 - Approximation de couche mince -

Il est possible de simplifier les calculs en introduisant une approximation de type "couche mince" directement dans les équations discrétisées. Les lignes de maillage du type  $OME$  étant orientées selon la direction principale de l'écoulement, l'hypothèse de couche mince revient à considérer que les termes dissipatifs au second membre de (4.1) sont essentiellement déterminés par les gradients transversaux (c'est-à-dire dans la direction de  $SMN$ ) de  $u, v, e$ . Si, dans les formules générales (4.10) on convient que  $P$  représente soit  $N$  soit  $S$ , et que  $Q$  soit  $E$  soit  $O$ , ces formules pourront être simplifiées en écrivant :

$$(4.14) \quad \begin{cases} (\delta_x \phi)_M \approx -y_{MQ} \phi_{MP} / J \\ (\delta_y \phi)_M \approx x_{MQ} \phi_{MP} / J \end{cases}$$

et ce, uniquement pour les termes dissipatifs. Les équations d'Euler restent donc entièrement contenues dans les équations discrétisées, et celles-ci restent également valables dans  $\mathcal{D}_v$ , que ce soit dans la couche visqueuse ou à l'extérieur.

#### 4.3.4 - Calcul en maillage variable -

Le schéma a été défini ci-dessus en supposant le maillage fixe. Or le calcul est effectué dans un maillage variable car les lignes transversales se déplacent pour suivre le mouvement du choc, aussi bien dans  $\mathcal{D}_p$  que dans  $\mathcal{D}_v$ .

Repérons les noeuds du maillage de façon habituelle par un couple d'indices  $(i, j)$



séparément pour  $\mathcal{D}_p$  et pour  $\mathcal{D}_v$ . Les lignes  $i = cte$ , obtenues par interpolation en  $y$ , sont fixes. Dans  $\mathcal{D}_p$  le choc est ajusté ; c'est une ligne de maillage mobile, d'indice  $i = i_c$  fixé, qui coupe l'interface entre  $\mathcal{D}_p$  et  $\mathcal{D}_v$  au point triple A (fig. 5).

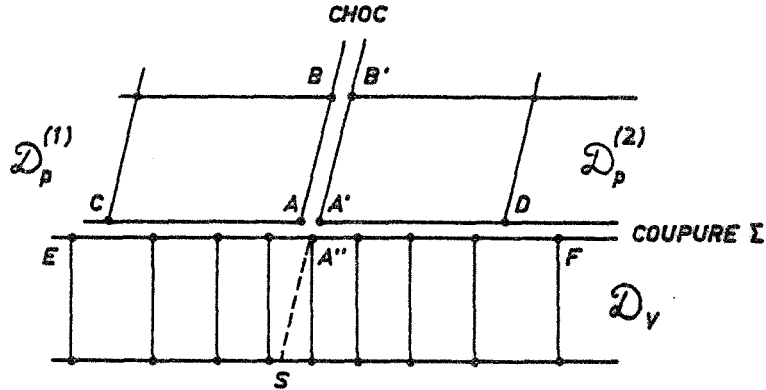


Fig. 5 - Maillage au voisinage du point triple.

Dans  $\mathcal{D}_v$  on prend les lignes  $i = cte$  verticales (les formules (4.10) sont simplifiées en conséquence), et la verticale issue de A,  $x = x_A(t)$ , est choisie comme une ligne de maillage  $i = i_A$ , d'indice  $i_A$  fixé ; ainsi le resserrement des lignes  $i = cte$  qu'on introduit autour de  $i = i_A$  pour une bonne représentation de la zone d'interaction, suit automatiquement le déplacement du choc.

Pour appliquer le schéma en maillage variable on pourrait, comme dans [24], remplacer  $\partial \bar{u} / \partial t$  dans (4.1) par  $\partial \bar{u} / \partial \tau = (w_x \partial \bar{u} / \partial x + w_y \partial \bar{u} / \partial y)$ , où  $\partial / \partial \tau$  représente la dérivée en temps en un point de maillage donné de vitesse  $\bar{w}$  (de composantes  $w_x, w_y$ ) et intégrer par rapport à  $\tau$ . Nous utilisons ici une autre technique consistant à calculer  $\bar{u}^{n+1}$  sur un maillage fixe défini à l'instant  $t^n$ , comme décrit dans les paragraphes précédents, puis à projeter cette solution  $\bar{u}^{n+1}$  sur un nouveau maillage défini à l'instant  $t^{n+1}$ .

Soit  $M$ ,  $E$  et  $O$  les positions à l'instant  $t^n$  des points de maillage  $(i, j)$  ( $i+1, j$ ) et  $(i-1, j)$  respectivement. La vitesse  $\bar{w}_{i,j}$  de déplacement du point  $(i, j)$  est déterminée par les 2 conditions suivantes : a)  $\bar{w}_{i,j}$  est parallèle à  $\overrightarrow{OE}$ , b) la composante  $w_{x,i,j}$  est obtenue par interpolation linéaire en  $x$  entre le choc dans  $\mathcal{D}_p$ , ou la ligne  $i = i_A$  dans  $\mathcal{D}_v$ , et la frontière fixe amont ou aval. On calcule alors la position  $M'$  du point  $(i, j)$  à l'instant  $t^{n+1}$ , ainsi que la valeur en  $M'$  de toute grandeur  $\phi$  connue dans le maillage de l'instant  $t^n$ , par un développement de Taylor au 1er ordre :

$$(4.15) \quad \begin{cases} \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{w}_{i,j} \Delta t = \lambda \Delta t \overrightarrow{OE} \\ \phi(M') = \phi(M) + \overrightarrow{M'M} \cdot \text{grad } \phi \\ \quad = \phi(M) + \lambda \Delta t [\phi(E) - \phi(O)] \end{cases}$$

En pratique la vitesse de déplacement du maillage reste très faible et le déplacement  $M'M$  reste toujours très inférieur à la dimension de la maille  $ME$  ou  $MO$ .

#### 4.3.5 - Traitement du point triple -

Le point triple  $A$  nécessite un traitement particulier assurant le passage de la méthode d'ajustement à la méthode de capture pour le choc, et tenant compte de ce que les lignes  $i = cte$  sont beaucoup plus resserrées dans  $\mathcal{D}_v$  que dans  $\mathcal{D}_p$  au voisinage de ce point.

Le schéma de la figure 5 montre le détail du maillage au voisinage du point triple (les interfaces entre sous-domaines sont dédoublées pour bien distinguer les points de maillage).

Le schéma numérique n'est pas appliqué aux points  $A$  et  $A'$ , et les valeurs de  $\bar{U}^*$  en ces points, qui interviennent dans les relations de compatibilité (2.12) sont obtenues par extrapolation parabolique le long de l'interface ( $j = cte$ ) à partir des points amont pour  $A$ , et à partir des points aval pour  $A'$ . La vitesse du choc qui résulte du traitement des points du choc n'est pas retenue en  $A$  pour calculer le déplacement de ce point ; en effet afin de relier le choc ajusté dans  $\mathcal{D}_p$  au choc capturé dans  $\mathcal{D}_v$ , on détermine le point choc  $A$  comme étant à l'intersection de l'interface avec le segment BS, S étant le point sonique sur la ligne  $j = cte$  immédiatement en-dessous de la coupure. Pour les points de maillage situés sur la coupure du côté de  $\mathcal{D}_v$  et entre E et F, on détermine les inconnues  $\bar{U}$  par interpolation linéaire entre C et A d'une part, et entre A' et D d'autre part, en prenant  $\bar{U}_A = (\bar{U}_A + \bar{U}_{A'})/2$  ; en E et F ainsi qu'en C et D, on applique le traitement de la coupure décrit au paragraphe 2.2. L'étalement du choc à la coupure est ainsi limité à 2 mailles de  $\mathcal{D}_v$ .

#### 4.3.6 - Traitement des frontières -

a) Paroi : le schéma (4.11) n'est pas appliqué à la paroi ( $j = 1$ ), mais seulement à partir de la ligne au-dessus ( $j = 2$ ). L'écoulement à la paroi est obtenu à partir des conditions aux limites ( $u = v = 0$ ,  $\partial e / \partial \eta = 0$ ), et à l'aide de l'équation de quantité de mouvement normale qui fournit  $\partial^2 \rho / \partial \eta^2$  en fonction des termes dissipatifs. Pour des écoulements à grand nombre de Reynolds, et pour une paroi à faible courbure, on peut prendre  $\partial^2 \rho / \partial \eta^2 = 0$ .

Compte tenu du choix des opérateurs  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\tilde{\delta}_x$  et  $\tilde{\delta}_y$  qui interviennent dans (4.11), le calcul du correcteur sur  $j = 2$  ne fait appel à des valeurs prédicteurs sur la paroi que pour les termes dissipatifs, et il n'est pas nécessaire de définir de valeurs prédicteurs pour  $\rho$  et  $e$ .

Les formules aux différences, décentrées en  $j$ , utilisées pour discrétiser  $\partial e / \partial \eta$  et  $\partial^2 \rho / \partial \eta^2$  à la paroi, conduisent à des systèmes tridiagonaux que l'on résout aisément par la méthode de double balayage.

b) Frontière amont : toutes les grandeurs sont données sur la frontière amont ( $i = 1$ ). On y calcule néanmoins un prédicteur  $\bar{U}^{n+1}$  qui est nécessaire au calcul du correcteur sur la colonne suivante ( $i = 2$ ).

c) Axe de symétrie : c'est une frontière du domaine  $\mathcal{D}_p$ . En fluide parfait, il est équivalent de traiter cette frontière comme une paroi plane, ce que l'on fait par la méthode décrite au paragraphe 3.1.

d) Frontière aval : la pression est imposée, et on utilise la méthode basée sur les relations de compatibilité décrite au paragraphe 3.1., aussi bien dans  $\mathcal{D}_p$  que dans  $\mathcal{D}_v$ . Naturellement dans  $\mathcal{D}_v$ , les valeurs  $\bar{U}^*$  sont celles fournies par le schéma pour les équations de Navier-Stokes, et non pour les équations d'Euler.

#### 4.3.7 - Sous-maillage -

Un maillage extrêmement fin est nécessaire près de la paroi pour bien représenter les variations très rapides des propriétés moyennes de l'écoulement dans la couche visqueuse turbulente.

Ce resserrement de maillage est réalisé en combinant deux techniques : a) une contraction régulière du maillage de base définie par une loi exponentielle :

$$(y - y_0(x)) / (y_A - y_0(x)) = (e^{\beta Y} - 1) / (e^{\beta} - 1)$$

où  $y = y_0(x)$  est la paroi et  $y = y_A$  la coupure, le maillage de base étant, par définition, à pas constant  $\Delta Y$ , et b) une technique de sous-maillage par zones [9], [24], dans laquelle la maille en  $Y$  est divisée par deux d'une zone à la suivante en allant vers la paroi. Cette technique de dichotomie permet un raffinement rapide du maillage, tout en conservant un maillage régulier dans chaque zone. Le raccord des zones est assuré par recouvrement, et un système spécial de balayage en temps des zones est mis en oeuvre de façon à utiliser dans chaque zone un pas de temps maximum propre à cette zone.

La figure 7 montre le sous-maillage réalisé avec cinq zones pour l'application numérique présentée au paragraphe 4.4.

#### 4.4 - Résultats -

Les conditions du problème d'interaction choc-couche limite traité ici sont celles d'une expérience réalisée dans la soufflerie S8 de l'ONERA et décrite dans [27]. Les conditions génératrices étaient les suivantes : pression génératrice  $P_i = 0,96$  bar ; température génératrice  $T_i = 300^\circ\text{K}$ . Le nombre de Reynolds calculé à partir de la hauteur  $R$  de la section aval ( $R = 50$  mm, demi-hauteur du canal), de la vitesse du son génératrice  $a_i$  et de la viscosité cinématique dans les conditions génératrices, est égal à :  $Re = 1,039.10^6$ . Le nombre de Prandtl turbulent vaut 0,9 ; le nombre de Prandtl est égal à 0,725 et le rapport des chaleurs spécifiques à 1,4. Enfin, le nombre de Mach à la frontière de la couche limite et à l'origine de l'interaction vaut environ 1,3.

Le domaine de calcul, qui s'étend de  $x = 113$  mm à  $x = 238$  mm, et les maillages (à convergence), sont représentés sur la figure 6. Le maillage comporte (22 x 13) points dans  $\mathcal{D}_p^{(v)}$  et (30 x 13) points dans  $\mathcal{D}_p^{(a)}$  ; le maillage de base de  $\mathcal{D}_v$  comprend (61 x 21) points.

Les conditions sur la frontière amont  $\Sigma_1$  ont été déterminées à partir d'un calcul préalable, par la même méthode, effectué dans la partie amont du canal représentée sur la figure 2.a, pour un régime amorcé sans choc. Les conditions initiales sont définies dans  $\mathcal{D}_p$  en prenant une solution monodimensionnelle correspondant à une loi de section du canal tenant compte d'une épaisseur de déplacement déduite de l'expérience ; la pression sur la frontière aval  $\Sigma_2$  est déterminée de telle sorte que le choc de la solution monodimensionnelle se place à l'abscisse du choc expérimentale. Les conditions initiales dans  $\mathcal{D}_v$  sont déduites des conditions amont ( $i=1$ ) et des conditions sur la coupure ( $j=j_A$ ) par les formules :  $\phi(i,j)/\phi(i,j_A) = \phi(1,j)/\phi(1,j_A)$  pour  $\phi = u, v, p, H$ . Sur la frontière aval, la pression est maintenue constante, égale à sa valeur initiale dans  $\mathcal{D}_p$  ( $p_2 = 0,6625 p_i$ ). Cette valeur diffère de la valeur expérimentale ( $p_2 = 0,6357 p_i$ ) par suite des effets tridimensionnels dus à la présence, dans l'expérience, de couches limites latérales.

Dans le modèle de turbulence, on utilise une loi d'épaisseur  $\delta$  expérimentale, calée sur le minimum de pression à la paroi.

Les résultats présentés correspondent à un nombre d'itérations égal à 3000, soit un temps physique écoulé égal à  $3,59 R/a_i = 5,16.10^{-4}$  sec. En début de calcul, le

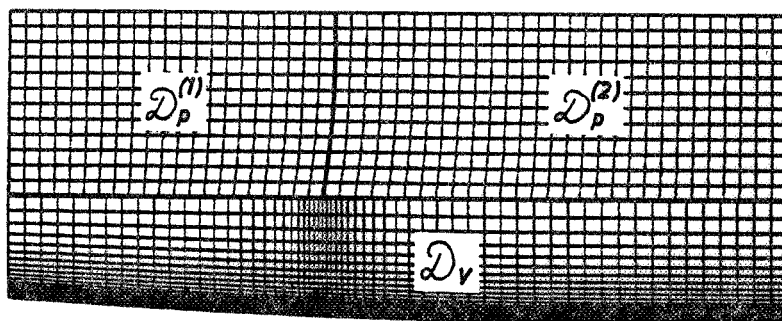


Fig. 6 - Domaines de calcul et maillages.

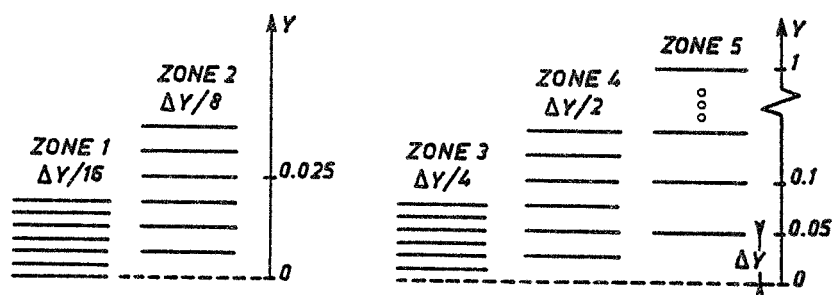
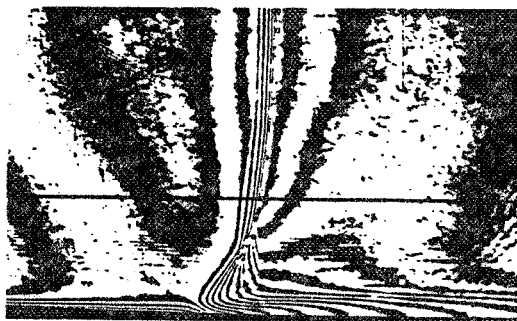


Fig. 7 - Sous-maillage par zones.



a) Interférométrie

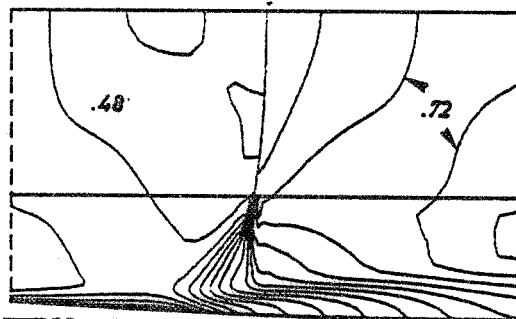
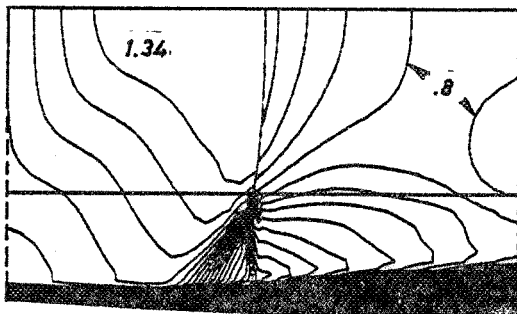
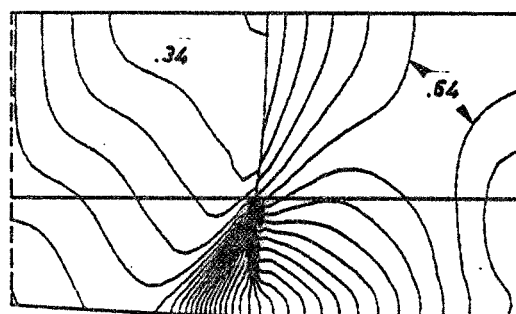
b) Courbes isochores (  $\Delta\rho = .02 \rho_i$  )c) Courbes iso-Mach (  $\Delta M = .02$  )d) Courbes isobares (  $\Delta p = .01 p_i$  )

Fig. 8 - Ecoulement dans la région d'interaction choc-couche limite

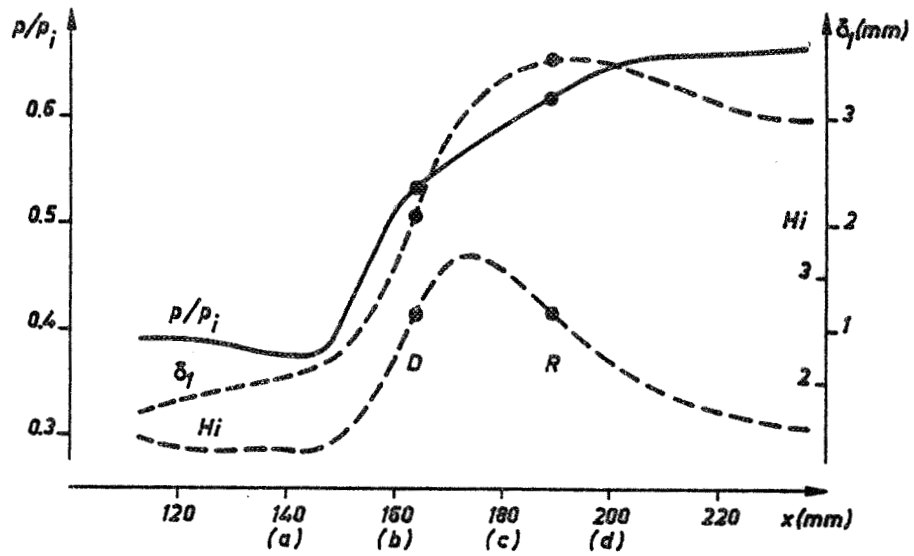


Fig. 9 - Distributions calculées de la pression pariétale, de l'épaisseur de déplacement et du facteur de forme

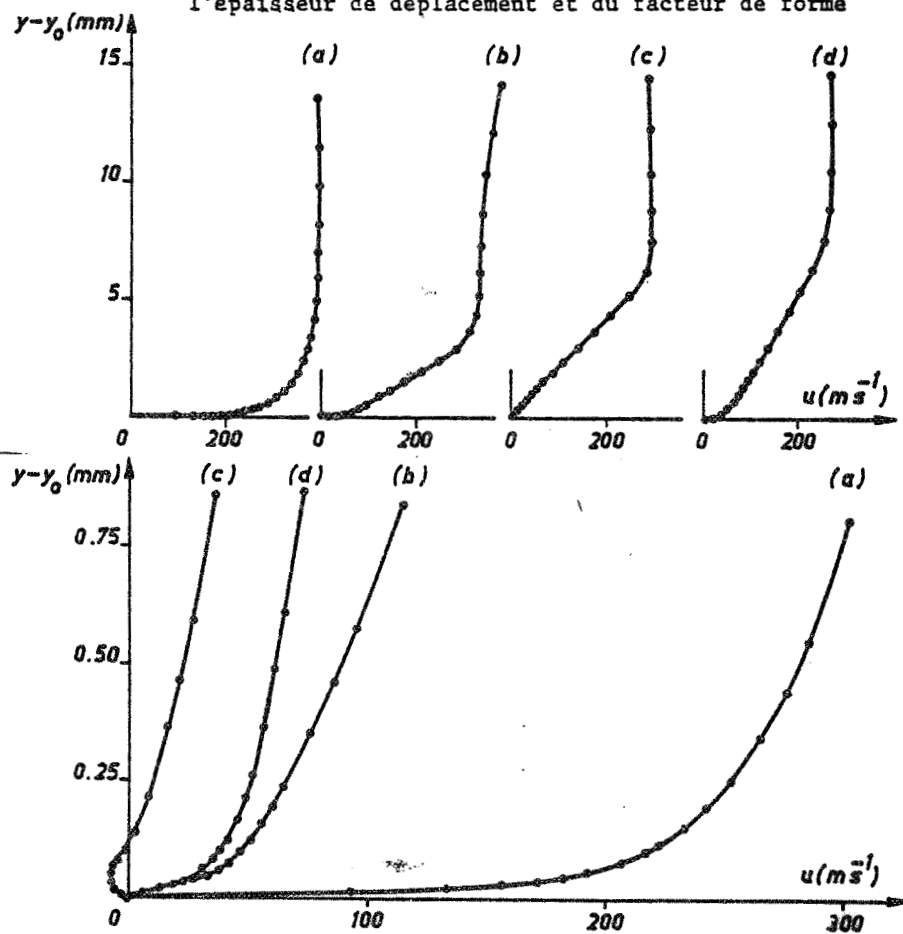


Fig. 10 - Profils de vitesse longitudinale

choc se déplace vers l'aval, puis revient vers l'amont et repasse par sa position expérimentale (au niveau de l'axe de symétrie) à 3000 itérations. La solution présentée ne correspond donc pas à une position d'équilibre du choc, mais on peut la considérer comme étant en évolution quasi-stationnaire, car la vitesse du choc est faible (environ  $0,023 a_i$ ).

Le modèle de turbulence utilisé ne pouvant être quantitativement correct dans la zone d'interaction, on ne présente pas ici de comparaison détaillée avec les résultats expérimentaux. La comparaison est cependant tout à fait satisfaisante qualitativement, comme on peut le voir sur les figures 8a et 8b, qui montrent des courbes isochores, respectivement expérimentales (obtenues par interférométrie holographique) et calculées. Les figures 8c et 8d représentent les courbes iso-nombre de Mach et les courbes isobares calculées. On notera sur la figure 8c l'épaississement rapide de la couche visqueuse, provoqué par l'interaction avec le choc (une partie seulement du domaine de calcul est représentée sur ces figures).

Les variations de  $\delta/\delta_i$ , où  $\delta$  est la pression pariétale, de l'épaisseur de déplacement  $\delta_i$  et du paramètre de forme  $H_i$  (rapport de l'épaisseur de déplacement "incompressible" à l'épaisseur de quantité de mouvement "incompressible") en fonction de  $x$  sont représentées sur la figure 9. La solution obtenue comporte un léger décollement; d'épaisseur faible, au plus égale à 0,15 mm, sur une distance d'environ 25 mm. Les points de décollement D et de recollement R sont indiqués sur la figure 9. Dans l'expérience, l'exploration de la couche limite par vélocimétrie laser a montré que celle-ci est très proche du décollement.

Des profils de vitesse longitudinale  $u$  sont représentés sur la figure 10, à deux échelles différentes, et pour les abscisses indiquées sur la figure 9 : un profil (a) à l'amont du choc, un profil (b) dans le choc, un profil (c) dans le décollement et un profil (d) recollé. Les points de maillage sont portés sur ces profils.

Les calculs ont été effectués sur un CYBER 170-750, et le temps de calcul pour les 3000 itérations est d'environ trois heures. Néanmoins, ce temps ne doit être pris que comme un ordre de grandeur ; il est très supérieur au temps de calcul qui pourrait être obtenu avec une optimisation du code numérique. En effet, le calcul présenté a été mené rapidement en associant deux programmes existants, l'un pour  $\mathcal{D}_p$ , l'autre pour  $\mathcal{D}_v$ , programmes qui avaient été réalisés indépendamment l'un de l'autre.

Cette étude a été effectuée avec le soutien financier de la Direction des Recherches Etudes et Techniques, et du Service Technique des Programmes Aéronautiques.

#### REFERENCES

- [1] Bailey, F.R., and Ballhaus, W.F., Use of Advanced Computers for Aerodynamic Flow Simulation, AGARD FMP Symposium on "The Use of Computers as a Design Tool", Neubiberg (W. Germany), Sept. 3-6, 1979.
- [2] Frailong, J.M., Pakleza, J., Resolution of General Partial Differential Equations on a Fixed Size SIMD/MIMD Large Cellular Processor, in : Dekker, L. et al. (eds.), Simulation of Systems '79, (North-Holland Publ. Co., 1980)
- [3] Morice, Ph., Calcul parallèle et décomposition dans la résolution d'équations aux dérivées partielles de type elliptique, IRIA Inf. 7214/72017 (Juin 1972).
- [4] Brune, G.W., Rubbert, P.E., and Forester, C.K., The Analysis of Flow Fields with Separation by Numerical Matching, AGARD-CP-168 (1975).

- [5] Dinh, R.V., Glowinski, R., Périaux, J., Applications of Domain Decomposition Techniques to the Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations, dans : Méthodes Numériques dans les Sciences de l'Ingénieur, G.A.M.N.I. 2, Vol. 1 (Dunod, 1980).
- [6] Métivet, B., Morchoisne, Y., Multi-Domain Spectral Technique for Viscous Flow Calculations, Proceedings of the Fourth GAMM Conf. on Num. Meth. in Fluid Mech. (Paris, Oct. 7-9, 1981), à paraître dans la série "Notes on Numerical Fluid Mechanics" (Vieweg, 1982).
- [7] Rose, W.C., and Seginer, A., Calculation of Transonic Flow Over Supercritical Airfoil Sections, J. Aircraft, 15, 8 (1978), 514-519.
- [8] Le Balleur, J.C., Calcul par couplage fort des écoulements visqueux transsoniques incluant sillages et décollements. Profils d'ailes portants, La Rech. Aerosp., N° 1981-3, 161-185.
- [9] Viviani, H. et Ghazzi, W., Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations at High Reynolds Numbers With Applications to the Blunt Body Problem, Lecture Notes in Physics, Vol. 59, (Springer-Verlag, 1976), et ONERA T.P. n° 1977-17.
- [10] Viviani, H., Pseudo-Unsteady Methods for Transonic Flow Computations, Lecture Notes in Physics, Vol. 141 (Springer-Verlag, 1980), et ONERA T.P. n° 1978-71.
- [11] Viviani, H., et Veuilliot, J.P., Méthodes pseudo-instationnaires pour le calcul d'écoulements transsoniques, ONERA Publication n° 1978-4, (English Translation, ESA TT561).
- [12] Veuilliot, J.P., and Viviani, H., A Pseudo-Unsteady Method for the Computation of Transonic Potential Flows, AIAA Paper n° 78-1150 (AIAA Fluid and Plasma Dyn. Conf., Seattle, Wash., July 10-12, 1978), et AIAA J., Vol. 17, n° 7 (July 1979).
- [13] Courant, R., and Hilbert, D., Methods of Mathematical Physics, Vol. II (Interscience Publishers, 1966).
- [14] Jeffrey, A., Quasilinear Hyperbolic System and Waves (Pitman Publishing, 1976).
- [15] Brochet, J., Calcul numérique d'écoulements internes tridimensionnels transsoniques, La Rech. Aérop. n° 1980-5, 301-315 (English Translation, ESA TT673).
- [16] Estrada, R. and Kanwal, R.P., Applications of Distributional Derivatives to Wave Propagation, J. Inst. Maths. Applics., 26, 39-63 (1980).
- [17] Lax, P.D., Hyperbolic Systems of Conservation Laws II, Comm. On Pure and Appl. Math., vol X. 537-566 (1957).
- [18] Mateer, G.G., Brosh, A., and Viegas, J.R., A Normal Shock-Wave Turbulent Boundary-Layer Interaction at Transonic Speeds, AIAA Paper n° 76-161 (1976).
- [19] Shea, J.R., A Numerical Study of Transonic Normal Shock-Turbulent Boundary-Layer Interactions, AIAA Paper n° 78-1170 (1978).
- [20] Viegas, J.R., and Horstman, C.C., Comparison of Multiequation Turbulence Models for Several Shock Boundary-Layer Interaction Flows, AIAA J., Vol. 17, n° 8, Aug. 1979.

- [21] Hollanders, H., and Viviani, H., The Numerical Treatment of Compressible High Reynolds Number Flows, in : Kollmann, W. (ed.), Computational Fluid Dynamics, Vol. 2 (Hemisphere Publ. Corp., Washington, 1980). Aussi ONERA T.P. n° 1979-22.
- [22] Michel, R., Quémard, C., et Durant, R., Application d'un schéma de longueur de mélange à l'étude des couches limites turbulentes d'équilibre, Note Technique ONERA n° 154 (1969).
- [23] MacCormack, R.W., The Effect of Viscosity in Hyper Velocity Impact Cratering, AIAA Paper n° 69-354 (1969).
- [24] Le Balleur, J.C., Peyret, R., and Viviani, H., Numerical Studies in High Reynolds Number Aerodynamics, Computers and Fluids, Vol. 8 (1980), 1-30. Aussi ONERA T.P. n° 1979-99.
- [25] Lerat, A., et Sidès, J., Calcul numérique d'écoulements transsoniques instationnaires, Réunion AGARD sur l'Aérod. transs. inst. pour les phénomènes aéroélastiques, Lisbonne (17-22 Avril 1977). ONERA T.P. n° 1977-19 F et n° 1977-19 E (trad. anglaise).
- [26] Gnoffo, P.A., Solutions of the Navier-Stokes Equations for Supersonic Flow Over Blunt Bodies in a Generalized Orthogonal Coordinate System, M.S. Thesis, Polytechnic Institute of Brooklyn, (1974).
- [27] Déléry, J., Investigation of Strong Shock Turbulent Boundary-Layer Interaction in 2D Transonic Flows with emphasis on Turbulence Phenomena, AIAA Paper n° 81-1245 (1981).